# 第７講　図形の性質

1　△ABC において，辺 BC を 7：1 に内分する点を D とし，辺 AC を 7：1 に内分する点を E とする。線分 AD と線分 BE の交点を F とし，直線 CF と辺 AB の交点を G とすると

$$\frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{AG}}=\boxed{\text{ア}},\quad \frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{AF}}=\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\quad \frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{GF}}=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。したがって

$$\frac{\triangle\mathrm{CDG}\text{ の面積}}{\triangle\mathrm{BFG}\text{ の面積}}=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$$

となる。

（1は次ページに続く。）

4 点 B，D，F，G が同一円周上にあり，かつ FD＝1 のとき

AB＝ ケコ

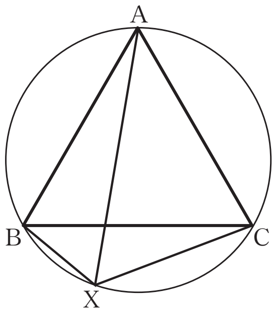
である。さらに，$AE=3\sqrt{7}$ とするとき，AE・AC＝ サシ であり

∠AEG＝ ス

である。 ス に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ ∠BGE　　① ∠ADB　　② ∠ABC　　③ ∠BAD

**2**　ある日，太郎さんと花子さんのクラスでは，数学の授業で先生から次の**問題 1** が宿題として出された。下の問いに答えよ。なお，円周上に異なる 2 点をとった場合，弧は二つできるが，本問題において，弧は二つあるうちの小さい方を指す。

> **問題 1**　正三角形 ABC の外接円の弧 BC 上に点 X があるとき，AX＝BX＋CX が成り立つことを証明せよ。
>
> 
> 

(1)　**問題 1** は次のような構想をもとにして証明できる。

> 線分 AX 上に BX＝B′X となる点 B′ をとり，B と B′ を結ぶ。
> AX＝AB′＋B′X なので，AX＝BX＋CX を示すには，AB′＝CX を示せばよく，AB′＝CX を示すには，二つの三角形 **ア** と **イ** が合同であることを示せばよい。

**ア**，**イ** に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。ただし，ア，イ の解答の順序は問わない。

⓪　△ABB′　　①　△AB′C　　②　△ABX　　③　△AXC
④　△BCB′　　⑤　△BXB′　　⑥　△B′XC　　⑦　△CBX

（2は次ページに続く。）

太郎さんたちは，次の日の数学の授業で**問題 1** を証明した後，点 X が弧 BC 上にないときについて先生に質問をした。その質問に対して先生は，一般に次の**定理**が成り立つことや，その**定理**と**問題 1** で証明したことを使うと，下の**問題 2** が解決できることを教えてくれた。

**定理**　平面上の点 X と正三角形 ABC の各頂点からの距離 AX，BX，CX について，点 X が三角形 ABC の外接円の弧 BC 上にないときは，
AX＜BX＋CX が成り立つ。

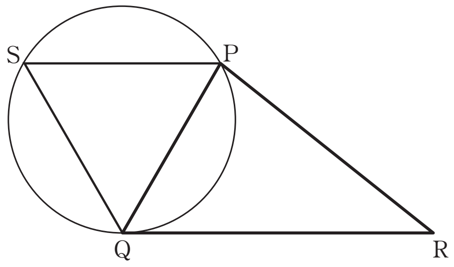
**問題 2**　三角形 PQR について，各頂点からの距離の和 PY＋QY＋RY が最小になる点 Y はどのような位置にあるかを求めよ。

（2は次ページに続く。）

(2)　太郎さんと花子さんは**問題 2** について，次のような会話をしている。

花子：**問題 1** で証明したことは，二つの線分 BX と CX の長さの和を一つの線分 AX の長さに置き換えられるってことだよね。

太郎：例えば，下の図の三角形 PQR で辺 PQ を 1 辺とする正三角形をかいてみたらどうかな。ただし，辺 QR を最も長い辺とするよ。辺 PQ に関して点 R とは反対側に点 S をとって，正三角形 PSQ をかき，その外接円をかいてみようよ。




花子：正三角形 PSQ の外接円の弧 PQ 上に点 T をとると，PT と QT の長さの和は線分 [ウ] の長さに置き換えられるから，
PT＋QT＋RT＝[ウ]＋RT になるね。

太郎：**定理**と**問題 1** で証明したことを使うと**問題 2** の点 Y は，点 [エ] と点 [オ] を通る直線と [カ] との交点になることが示せるよ。

花子：でも，∠QPR が [キ]° より大きいときは，点 [エ] と点 [オ] を通る直線と [カ] が交わらないから，∠QPR が [キ]° より小さいときという条件がつくよね。

太郎：では，∠QPR が [キ]° より大きいときは，点 Y はどのような点になるのかな。

(i)　[ウ] に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ PQ　　① PS　　② QS
③ RS　　④ RT　　⑤ ST

(②は次ページに続く。)

(ii) [エ], [オ] に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。ただし，[エ], [オ] の解答の順序は問わない。

⓪ P　　① Q　　② R　　③ S　　④ T

(iii) [カ] に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 辺 PQ　　① 辺 PS　　② 辺 QS
③ 弧 PQ　　④ 弧 PS　　⑤ 弧 QS

(iv) [キ] に当てはまるものを，次の⓪～⑥のうちから一つ選べ。

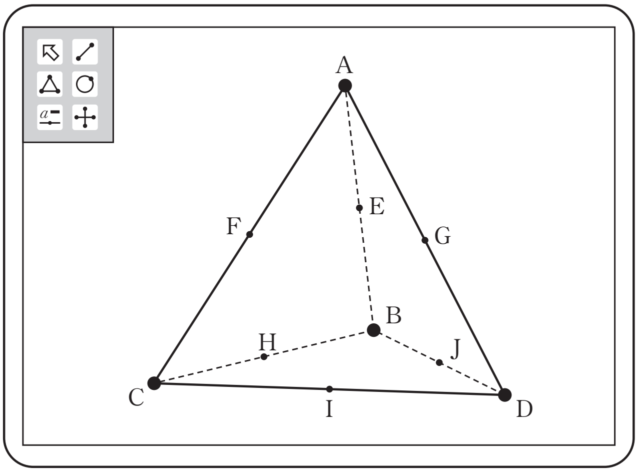
⓪ 30　　① 45　　② 60　　③ 90
④ 120　　⑤ 135　　⑥ 150

(v) ∠QPR が [キ]° より「小さいとき」と「大きいとき」の点 Y について正しく述べたものを，それぞれ次の⓪～⑥のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

小さいとき [ク]　　大きいとき [ケ]

⓪ 点 Y は，三角形 PQR の外心である。
① 点 Y は，三角形 PQR の内心である。
② 点 Y は，三角形 PQR の重心である。
③ 点 Y は，$\angle PYR = \angle QYP = \angle RYQ$ となる点である。
④ 点 Y は，$\angle PQY + \angle PRY + \angle QPR = 180^\circ$ となる点である。
⑤ 点 Y は，三角形 PQR の三つの辺のうち，最も短い辺を除く二つの辺の交点である。
⑥ 点 Y は，三角形 PQR の三つの辺のうち，最も長い辺を除く二つの辺の交点である。

3　花子さんと太郎さんは，正四面体 ABCD の各辺の中点を次の図のように E，F，G，H，I，J としたときに成り立つ性質について，コンピュータソフトを使いながら，下のように話している。二人の会話を読んで，下の問いに答えよ。




花子：四角形 FHJG は平行四辺形に見えるけれど，正方形ではないかな。

太郎：4 辺の長さが等しいことは，簡単に証明できそうだよ。

（3は次ページに続く。）

(1)　太郎さんは四角形 FHJG の 4 辺の長さが等しいことを，次のように証明した。

**太郎さんの証明**

［ア］により，四角形 FHJG の各辺の長さはいずれも正四面体 ABCD の 1 辺の長さの［イ］倍であるから，4 辺の長さが等しくなる。

(i)　［ア］に当てはまる最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

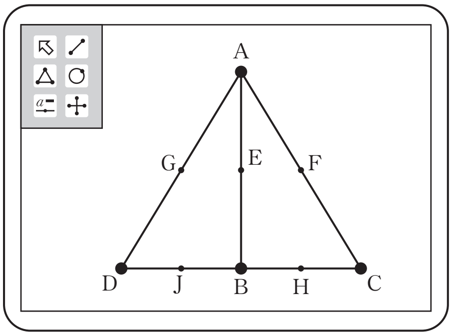
⓪　中線定理　　①　方べきの定理　　②　三平方の定理
③　中点連結定理　　④　円周角の定理

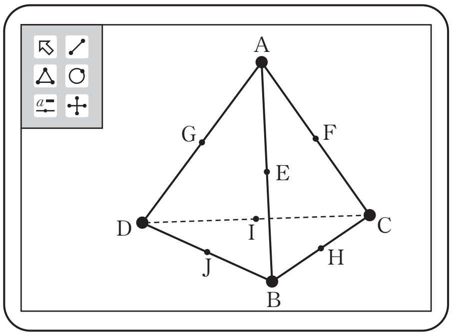
(ii)　［イ］に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

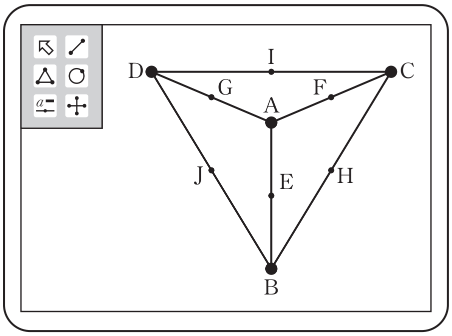
⓪　$2$　　①　$\frac{3}{4}$　　②　$\frac{2}{3}$　　③　$\frac{1}{2}$　　④　$\frac{1}{3}$

（3は次ページに続く。）

(2)　花子さんは，太郎さんの考えをもとに，正四面体をいろいろな方向から見て，四角形FHJGが正方形であることの証明について，下のような構想をもとに，実際に証明した。




**花子さんの構想**

四角形において，4辺の長さが等しいことは正方形であるための［ウ］。さらに，対角線FJとGHの長さが等しいことがいえれば，四角形FHJGが正方形であることの証明となるので，△FJCと△GHDが合同であることを示したい。

しかし，この二つの三角形が合同であることの証明は難しいので，別の三角形の組に着目する。

（3は次ページに続く。）

**花子さんの証明**

点 F，点 G はそれぞれ AC，AD の中点なので，二つの三角形 **エ** と **オ** に着目する。 エ と オ は 3 辺の長さがそれぞれ等しいので合同である。このとき， エ と オ は **カ** で，F と G はそれぞれ AC，AD の中点なので，FJ＝GH である。

よって，四角形 FHJG は，4 辺の長さが等しく対角線の長さが等しいので正方形である。

(i) **ウ** に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 必要条件であるが十分条件でない
① 十分条件であるが必要条件でない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

(ii) **エ** ， **オ** に当てはまるものが，次の⓪～⑤の中にある。当てはまるものを一つずつ選べ。ただし， エ と オ の解答の順序は問わない。

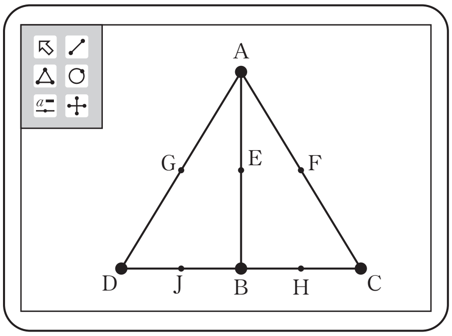
⓪ △AGH　① △AIB　② △AJC
③ △AHD　④ △AHC　⑤ △AJD

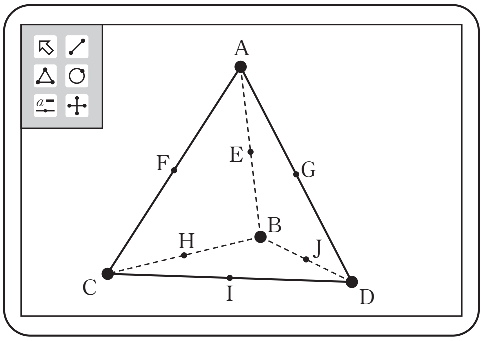
(iii) **カ** に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 正三角形　① 二等辺三角形
② 直角三角形　③ 直角二等辺三角形

（③は次ページに続く。）

四角形 FHJG が正方形であることを証明した太郎さんと花子さんは，さらに，正四面体 ABCD において成り立つ他の性質を見いだし，下のように話している。




花子：線分 EI と辺 CD は垂直に交わるね。

太郎：そう見えるだけかもしれないよ。証明できる？

花子：(a)辺 CD は線分 AI とも BI とも垂直だから，(b)線分 EI と辺 CD は垂直といえるよ。

太郎：そうか……。ということは，(c)この性質は，四面体 ABCD が正四面体でなくても成り立つ場合がありそうだね。

(3) 下線部(a)から下線部(b)を導く過程で用いる性質として正しいものを，次の⓪～④のうちから**すべて選べ**。 **キ**

⓪ 平面 $\alpha$ 上にある直線 $\ell$ と平面 $\alpha$ 上にない直線 $m$ が平行ならば，$\alpha /\!/ m$ である。

① 平面 $\alpha$ 上にある直線 $\ell$，$m$ が点 P で交わっているとき，点 P を通り平面 $\alpha$ 上にない直線 $n$ が直線 $\ell$，$m$ に垂直ならば，$\alpha \perp n$ である。

② 平面 $\alpha$ と直線 $\ell$ が点 P で交わっているとき，$\alpha \perp \ell$ ならば，平面 $\alpha$ 上の点 P を通るすべての直線 $m$ に対して，$\ell \perp m$ である。

③ 平面 $\alpha$ 上にある直線 $\ell$，$m$ がともに平面 $\alpha$ 上にない直線 $n$ に垂直ならば，$\alpha \perp n$ である。

④ 平面 $\alpha$ 上に直線 $\ell$，平面 $\beta$ 上に直線 $m$ があるとき，$\alpha \perp \beta$ ならば，$\ell \perp m$ である。

（3は次ページに続く。）

(4)　下線部(c)について，太郎さんと花子さんは正四面体でない場合についても考えてみることにした。

四面体 ABCD において，AB，CD の中点をそれぞれ E，I とするとき，下線部(b)が常に成り立つ条件について，次のように考えた。

**太郎さんが考えた条件**：AC＝AD，BC＝BD

**花子さんが考えた条件**：BC＝AD，AC＝BD

四面体 ABCD において，下線部(b)が成り立つ条件について正しく述べているものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。 ク

⓪　太郎さんが考えた条件，花子さんが考えた条件のどちらにおいても常に成り立つ。

①　太郎さんが考えた条件では常に成り立つが，花子さんが考えた条件では必ずしも成り立つとは限らない。

②　太郎さんが考えた条件では必ずしも成り立つとは限らないが，花子さんが考えた条件では常に成り立つ。

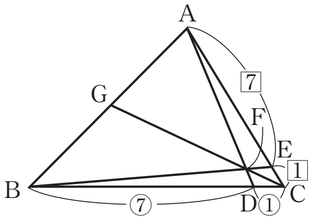
③　太郎さんが考えた条件，花子さんが考えた条件のどちらにおいても必ずしも成り立つとは限らない。

# 第７講　図形の性質

[1] △ABC について，チェバの定理より

$$\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GA}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DB}}=1 \qquad \frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{AG}}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{1}{7}=1 \qquad \text{よって}\ \frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{AG}}=1$$

△ADC と直線 BE について，メネラウスの定理より




$$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}}\cdot\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FA}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}=1 \qquad \frac{8}{7}\cdot\frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{7}{1}=1$$

$$\text{よって}\ \frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{AF}}=\frac{1}{8}$$

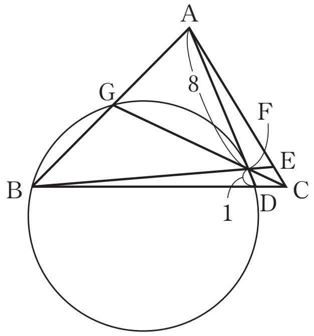
△GCB と直線 AD について，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AG}}\cdot\frac{\mathrm{GF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DB}}=1 \qquad \frac{2}{1}\cdot\frac{\mathrm{GF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{1}{7}=1 \qquad \text{よって}\ \frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{GF}}=\frac{2}{7}$$

$$\triangle\mathrm{CDG}=\triangle\mathrm{BFG}\times\frac{\mathrm{GC}}{\mathrm{GF}}\times\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BC}}=\triangle\mathrm{BFG}\times\frac{9}{7}\times\frac{1}{8}=\triangle\mathrm{BFG}\times\frac{9}{56}$$

$$\text{よって}\ \frac{\triangle\mathrm{CDG}}{\triangle\mathrm{BFG}}=\frac{9}{56}$$

4 点 B，D，F，G が同一円周上にあり，かつ FD＝1 のとき FA＝8




AG＝$x$ とすると，方べきの定理により

AG・AB＝AF・AD

$x\cdot 2x=8\cdot 9$

$2x^2=72$　　$x^2=36$　　よって　$x=6$

したがって AB＝$2x$＝12

さらに，AE＝$3\sqrt{7}$ のとき

$$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AC}=\mathrm{AE}\cdot\frac{8}{7}\mathrm{AE}=\frac{8}{7}\cdot\left(3\sqrt{7}\right)^2=72$$

AE・AC＝AG・AB(＝72) より，方べきの定理の逆から，4 点 B，C，E，G は同一円周上にある。

したがって，円に内接する四角形の性質より ∠AEG＝∠ABC（❷）

**2** (1) 線分 AX 上に BX＝B′X となる点 B′ をとり，B と B′ を結ぶ。

$$AX=BX+CX \iff AB'+B'X=BX+CX \iff AB'=CX$$

より，AX＝BX＋CX を示すには，AB′＝CX を示せばよく，

AB′＝CX を示すには，△ABB′ (⓪) ≡△CBX (⑦) を示せばよい。

BX＝B′X，∠BXA＝∠BCA＝60° より，△BB′X は正三角形である。

△ABB′ と △CBX において

AB＝CB（正三角形 ABC の辺）

∠BAB′＝∠BCX（弧 BX の円周角）

また，∠ABB′＝∠ABC－∠B′BC＝60°－∠B′BC

∠CBX＝∠B′BX－∠B′BC＝60°－∠B′BC より

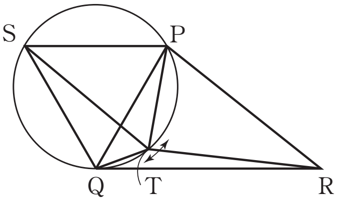
∠ABB′＝∠CBX

よって，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，△ABB′≡△CBX

(2)(i) △PSQ の外接円の弧 PQ 上に点 T をとると，

**問題 1** の結果より PT＋QT＝ST（⑤）

よって，PT＋QT＋RT＝ST＋RT

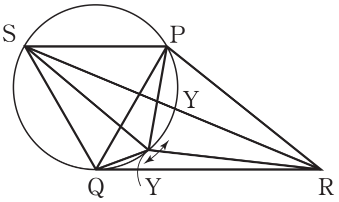



(ii)(iii)

点 Y が △PSQ の外接円の弧 PQ 上にあるとき

PY＋QY＋RY＝SY＋RY≧SR

（等号成立は，線分 SR 上に点 Y があるとき）



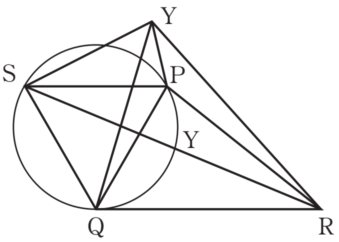

点 Y が △PSQ の外接円の弧 PQ 上にないとき

**定理** より PY＋QY＞SY

よって，PY＋QY＋RY＞SY＋RY≧SR より

PY＋QY＋RY＞SR

（等号成立は，線分 SR 上に点 Y があるとき）

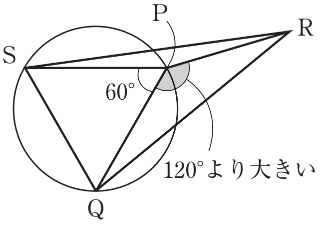



よって，**問題 2** の点 Y は，点 S (③) と点 R (②) を通る直線と弧 PQ (③) との交点になる。

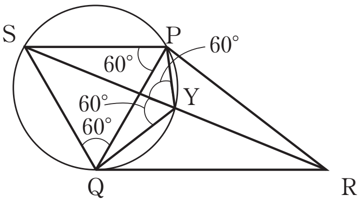
(iv) ∠QPR が 120°（④）より

大きいときは，点 S と点 R を

通る直線と弧 PQ が交わらない。



(v)　∠QPR が 120° より小さいとき




∠QYS＝∠QPS＝60°

(弧 QS に対する円周角)

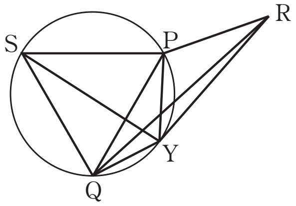
∠PYS＝∠PQS＝60°

(弧 PS に対する円周角)

より，点 Y は，∠PYR＝∠QYP＝∠RYQ＝120°

となる点である（③）

∠QPR が 120° より大きいとき




点 Y が △PSQ の外接円の弧 PQ 上にあるとき

PY＋QY＋RY＝SY＋RY≧SP＋RP

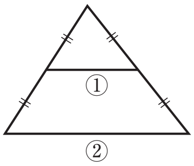
(等号成立は，点 Y が点 P と一致するとき)

点 Y が △PSQ の外接円の弧 PQ 上にないとき

PY＋QY＋RY＞SP＋RP

よって，PY＋QY＋RY が最小となる点 Y は，点 Y が点 P と一致するとき，すなわち三角形 PQR の三つの辺のうち，もっとも長い辺を除く二つの辺 PQ，PR の交点である（⑥）

**3**　(1)　(i)(ii)中点連結定理(③)より，四角形 FHJG の各辺の長さは，いずれも正四面体 ABCD の 1 辺の長さの $\frac{1}{2}$ 倍(③)であるから，4 辺の長さが等しくなる。



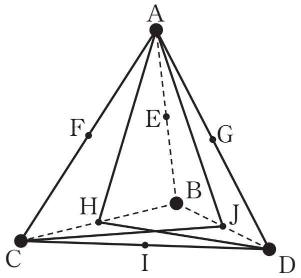

(2)(i)　四角形において

4 辺の長さが等しい $\Longrightarrow$ 正方形　は偽（反例：四角形が正方形ではないひし形）

4 辺の長さが等しい $\Longleftarrow$ 正方形　は真

よって，四角形において，4 辺の長さが等しいことは正方形であるための必要条件であるが十分条件でない（⓪）

(ii)　△AJC と △AHD において




AJ＝AH，CJ＝DH (合同な正三角形の中線)

AC＝AD (正三角形 ACD の辺の長さ)

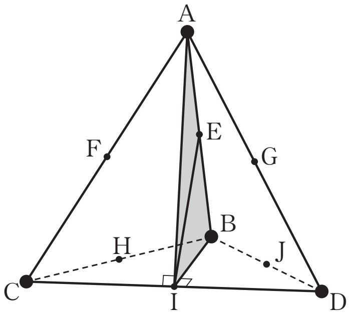
より，3 辺の長さがそれぞれ等しいので，

△AJC≡△AHD
(②)　　(③)

(iii)　△AJC と △AHD は合同な二等辺三角形(①)で，点 F，G はそれぞれ辺 AC，AD の中点であることから，FJ＝GH

よって，四角形 FHJG は，4 辺の長さが等しく対角線の長さが等しいので，正方形である。

(3)　①を用いると，平面 AIB 上にある直線 AI，BI が点 I で交わっていて，点 I を通り平面 AIB 上にない直線 CD が直線 AI, BI に垂直であるから，平面 AIB⊥直線 CD である。




さらに②を用いると，平面 AIB と直線 CD が点 I で交わっていて，平面 AIB⊥直線 CD であるから, 平面 AIB 上の点 I を通るすべての直線 $m$ に対して, 直線 CD⊥直線 $m$ である。

直線 EI は平面 AIB 上にあり，かつ点 I を通る直線であるので，直線 CD⊥直線 EI である。

⓪は，(a)から(b)を導く過程で用いられていない。

③は命題として正しくない。

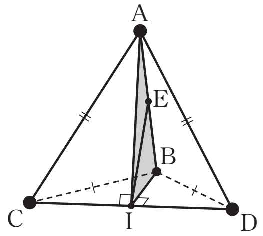
④は，(a)から(b)を導く過程で用いられていない。

以上より，(a)から(b)を導く過程で用いる性質として正しいものは，①，②である。

(4)　太郎さんが考えた条件について考える。

AC＝AD，BC＝BD のとき，△ACD，△BCD は二等辺三角形であるから，中線 AI，BI に関して AI⊥CD，BI⊥CD である。

よって，(3)より下線部(b)が常に成り立つ。




花子さんが考えた条件について考える。

△ABC と △BAD において，

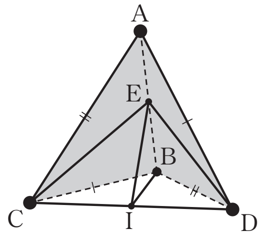
BC＝AD，AC＝BD，AB＝BA

より，3 辺の長さがそれぞれ等しいので，

△ABC≡△BAD である。

よって，△ECD は EC＝ED の二等辺三角形である。

したがって下線部(b)が常に成り立つ。




以上より，太郎さんが考えた条件，花子さんが考えた条件のどちらにおいても常に成り立つ（⓪）